ISOMETRIE, PROBLEMI DI MINIMO O MASSIMO, II TEOREMA DI EUCLIDE

Le maggiori difficoltà nell'insegnamento della geometria risiedono nell'impostazione generale – che, senza "infliggere" gli assiomi sin dall'inizio, sarebbe opportuno affrontare con l'uso delle trasformazioni - e nella scelta di esercizi significativi e stimolanti. A tale scopo, già nel biennio, è interessante proporre la risoluzione di problemi di minimo o di massimo utilizzando le isometrie che costituiscono un importante strumento sia euristico (la ricerca degli "invarianti" è fondamentale in Fisica per esempio) sia dimostrativo.
I due esempi seguenti possono essere presentati, rispettivamente, al primo e secondo anno del biennio della Scuola Media Superiore.

1) Un problema di economia (Percorso minimo)

Prerequisiti: *proprietà triangolare, traslazione, distanza fra rette parallele.*
Per una maggiore efficacia didattica e un più significativo coinvolgimento dei giovani, è opportuno l'uso di un software dinamico.

Svolgimento

A Geometricity si vuole costruire una strada che consenta di collegare Piazza Archimede con Largo Euclide, che stanno da parte opposta rispetto al fiume Pitagora, in un tratto in cui le rive sono rettilinee e parallele. Gli amministratori, buoni amministratori, hanno deliberato di assegnare i lavori alla ditta che, utilizzando determinati materiali, presenti la spesa minima.
La Trasla-Costruzioni, a tale scopo, fa eseguire degli studi per trovare il percorso più breve e vincere la gara d'appalto. Aiutiamoli! (E' fondamentale abituare gli allievi a partecipare attivamente alla scoperta delle proprietà).
Schematizziamo la situazione come in figura, in cui **A** ed **E** rappresentano rispettivamente la piazza e il largo.

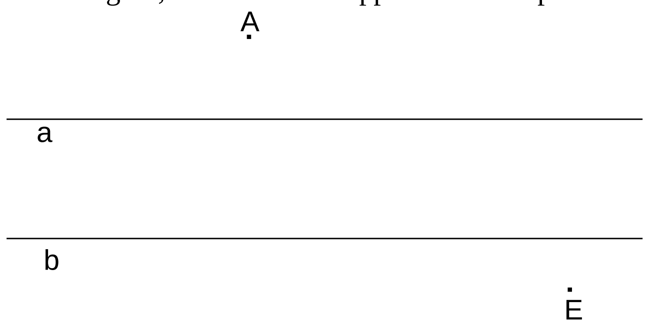


figura 1

Dobbiamo individuare il percorso più breve tra **A** ed **E**, dovendo costruire un ponte tra le sponde **a** e **b** del fiume (figura 1). Il ponte deve essere perpendicolare alle rive per motivi di statica. Coinvolgiamo i ragazzi invitandoli a proporre soluzioni motivate, facendo osservare che qualunque percorso deve contenere il ponte, cioè la distanza fra le due rette. Le risposte più immediate sono quella di andare da **A** sulla proiezione **H** di **A** su **a** e da **H** a **E**, o l'altra in cui il fiume è attraversato nel punto medio delle proiezioni di **A** ed **E** su **a** o su **b**, che mancano però di motivazioni razionali. Se non emerge alcuna idea utile, possiamo suggerire di cercare qualche isometria che *elimini* il fiume.
Eseguiamo allora la traslazione **τ** che muta la retta **b** nella retta **a** individuata dal vettore $\overrightarrow{TT'}$ perpendicolare ad **a**, dove **T** è un qualunque punto di **a**. Diciamo **b**' la retta sovrapposta ad **a**, **E**' il punto corrispondente di **E** in **τ**, **C**'≡**C** l'intersezione di **AE**' con **b**'≡**a** e **D**≡**D**' (figura 2)
un punto di **b**'≡**a** diverso da **C**. Costruiamo i segmenti **AD** e **DE**'. Allora per la proprietà triangolare…..:
$\overline{AE'} < \overline{AD} + \overline{DE'}$, cioè (*) $\overline{AC} + \overline{CE'} < \overline{AD} + \overline{DE'}$, che possiamo anche scrivere $\overline{AC} + \overline{C'E'} < \overline{AD'} + \overline{DE'}$ qualunque sia la posizione di **D** su **a** diversa da **C**.

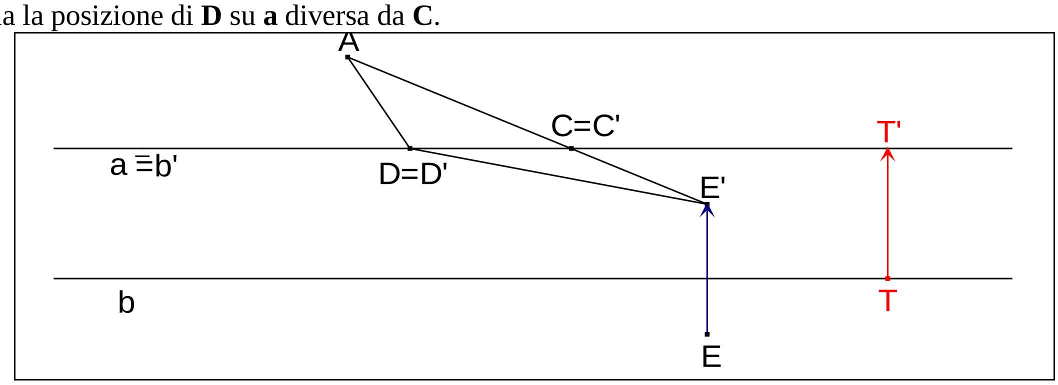


figura 2

Per risolvere il nostro problema basta dunque…

Aggiungere il "ponte" ai due percorsi indicati nella (*). Riportiamo quindi **T** su **b**, cioè eseguiamo la traslazione opposta a $\boldsymbol{\tau}$, $\boldsymbol{\tau}^{-1}$: si ha $\overline{CC'} = \overline{DD'}$ poiché sono entrambi la distanza fra le rette parallele **a** e **b** (figura 3). Allora addizionando nella (*) $\overline{CC'}$ al primo membro e $\overline{DD'}$ al secondo, abbiamo, per **D** generico su **a**: (**) $\overline{AC} + \overline{CC'} + \overline{C'E'} < \overline{AD} + \overline{DD'} + \overline{D'E'}$. Dunque il percorso più "economico" è $\overline{AC} + \overline{CC'} + \overline{C'E'} = \overline{AC} + \overline{CC'} + \overline{C'E}$, poiché **E'**≡**E**.

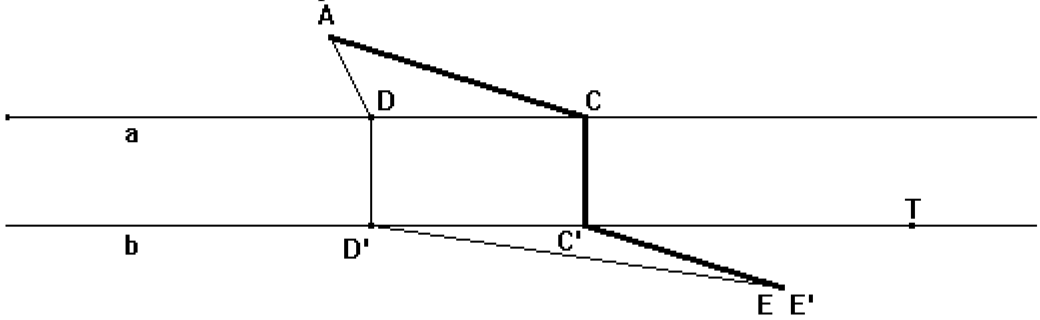


figura 3

E' utile, per una migliore comprensione della soluzione, riportare tutto nella situazione iniziale e ripetere il ragionamento dopo avere modificato le posizioni di **A**, **E**, **a** e **b**, con **A** ed **E** esterni alla striscia di piano.

Riprendendo le considerazioni economiche iniziali possiamo scherzosamente concludere che le isometrie possono contribuire alla… buona amministrazione della cosa pubblica.

2) **Rettangoli di area massima**.

OBIETTIVO

Trovare il rettangolo di area massima fra quelli inscritti in un triangolo rettangolo e con un vertice coincidente con quello dell'angolo retto.

<u>Prerequisiti.</u> *Piccolo teorema di Talete applicato a un triangolo, simmetria assiale, centrale, equivalenza, area.*

È opportuno utilizzare un sofware dinamico.

Svolgimento

Sia **ABC** un triangolo rettangolo in **A**. Preso un punto **P** su **BC**, determiniamo uno dei nostri rettangoli tracciando i segmenti **PD** e **PE** rispettivamente perpendicolari ad **AB** e **AC**: **AEPD** è uno di quelli cercati (figure 4 e 5).

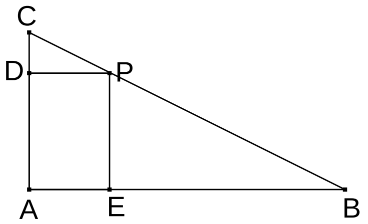


figura 4

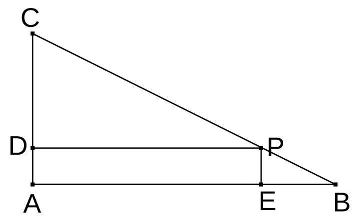


figura 5

Muovendo ripetutamente **P** su **BC** (figure 4 e 5) si modificano le lunghezze dei lati e quindi l'area del rettangolo **AEPD**; i giovani intuiscono che se **P** si avvicina a **B** o a **C**, uno dei lati, e quindi l'area, tende a diventare zero, mentre essa cresce via via che **P** si approssima a una posizione intermedia fra **B** e **C**. Questo fa congetturare che il rettangolo cercato è quello in cui il punto **P** coincide col punto medio di **BC**. Cerchiamo di provare quanto intuito invitando i giovani a partecipare costantemente all'individuazione del percorso dimostrativo.

Coinvolgiamoli innanzi tutto nel dedurre che il rettangolo "incriminato" ha come vertici, oltre ad **A** ed **M**, $\mathbf{M}_1$ ed $\mathbf{M}_2$ punti medi ordinatamente di **AC** e **AB**, per la nota proprietà della parallela a un lato di un triangolo per il punto medio di un altro lato. (figura 6).

Facciamo osservare che la retta $\mathbf{M}_1\mathbf{M}$, perpendicolare ad AC essendo il triangolo rettangolo in **A**, è asse del segmento **AC** e dunque il segmento **AM** è simmetrico di **CM** rispetto a $\mathbf{M}_1\mathbf{M}$, figura 7 (cercare le simmetrie è spesso utile).

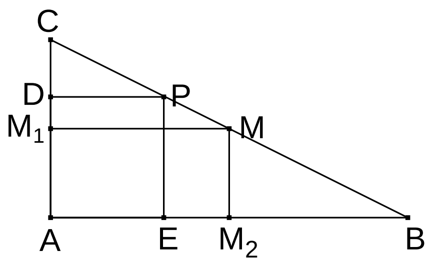


figura 6

Proseguiamo scegliendo inizialmente **P** sul segmento **MC**. Chiamiamo **I** il punto in cui il segmento **PE** interseca **M_1M**; poiché i rettangoli **AM_2MM_1** e **AEPD** hanno in comune il rettangolo **$AEIM_1$**, basta dimostrare che **EM_2MI** è prevalente rispetto a **M_1IPD**: per confrontarli più facilmente utilizziamo la simmetria prima osservata. Costruiamo **D'** e **P'** simmetrici rispettivamente di **D** e **P** rispetto a **MM_2** e il punto **H** intersezione di **MM_2** con la retta **D'P'**; abbiamo che **P'** sta su **AM** simmetrico di **CM** rispetto a **MM_1**, e osserviamo che è più semplice confrontare l'area di **$D'P'IM_1$**- uguale a quella di **M_1IPD** perché rettangoli simmetrici - con quella di **EM_2MI**.

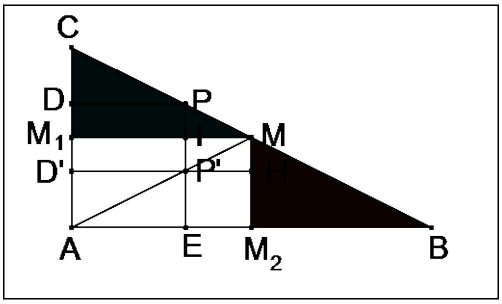


figura 7

Infatti, i triangoli **AM_2M** e **AMM_1** sono equivalenti perché metà del rettangolo **AM_2MM_1**. Essi sono formati il primo dai triangoli **P'HM** e **AEP'** e dal rettangolo **EM_2HP'**, il secondo dai triangoli **P'MI** e **AP'D'** – equivalenti nell'ordine a **P'HM** e **AEP'** - e dal rettangolo **$D'P'IM_1$** che ha, per differenza la stessa superficie di **EM_2 HP'**, e risulta con ciò suvvalente al rettangolo **EM_2MI**.

Analoghe considerazioni se **P** appartiene al segmento **MB** sfruttando la simmetria rispetto alla retta **MM_2**.

E' importante infine fare scoprire quanto vale l'area del rettangolo trovato. Per le simmetrie osservate essa è metà di quella del triangolo **ABC**.

Isometrie e II teorema di Euclide

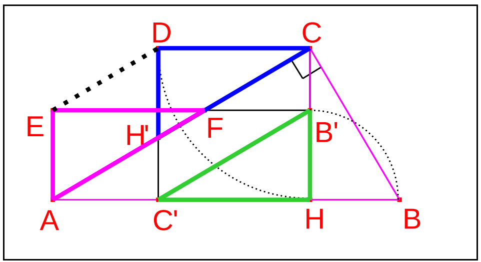
Presento ora una semplice dimostrazione del II teorema di Euclide con l'uso delle isometrie, che è indipendente dai teoremi I di Euclide e di Pitagora.

<u>In ogni triangolo rettangolo il quadrato dell'altezza relativa all'ipotenusa è equiesteso al rettangolo che ha per lati le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa</u>.

Siano **ABC** un triangolo rettangolo in **C** e altezza **CH** relativa all'ipotenusa **AB**.

Costruiamo quadrato e rettangolo. Per il primo ruotiamo il triangolo **HBC** attorno a **C** di un angolo retto in senso orario; per il secondo, lo stesso triangolo rettangolo attorno ad **H** di un angolo retto in senso antiorario:

- per costruzione **C'HCD** è un quadrato che ha per lato l'altezza relativa all'ipotenusa **CH**.
- $\overline{DH'} = \overline{HB} = \overline{HB'}$ e $\overline{H'C'} = \overline{CB'}$ perché rispettivamente differenze dei segmenti isometrici **CH** e **DC'** e dei segmenti isometrici **DH'** e **B'H**.



Allora **H'C'B'C** è un parallelogramma avendo due lati opposti isometrici e paralleli **H'C'** e **CB'**. Inoltre **AH'DE** è un parallelogramma poiché ha i lati opposti **EA** e **DH'** isometrici e paralleli; e lo è anche **EFCD** avendo i lati opposti **EF** e **DC** isometrici e paralleli: da ciò $\overline{ED} = \overline{AH'} = \overline{FC}$. Di conseguenza la traslazione **τ** di vettore $\overrightarrow{H'A}$ muta **D** in **E** e **C** in **F**, quindi in **τ** **H'CD** ha per corrispondente **AFE** e **AC'H'** ha per associato **FB'C**.

Allora il quadrato e il rettangolo sono equiestesi perché formati da poligoni a coppie isometrici:
H'CD a **FAE**, **AC'H'** a **FB'C** e **C'B'FH'** e **C'HB'** in comune.

<u>Questo teorema riveste particolare importanza nella teoria dell'equiestensione perché consente di trasformare un rettangolo in un quadrato equiesteso</u>.

Infatti, ogni poligono si può trasformare in uno equiesteso con un lato in meno, quindi in un triangolo.

E ciascun triangolo è equiesteso a un rettangolo che ha la stessa base del triangolo e altezza uguale a metà altezza dello stesso triangolo. Dalla dimostrazione precedente:

Ogni poligono è equiesteso a un opportuno quadrato.

Osservazione

Definita l'area di un quadrato il cui lato misura **l** come **l^2**, è allora immediato assumere per area di un rettangolo i cui lati misurano **a** e **b** come il numero **l^2=a*b** (come in *Manumat* di Maraschini e Palma). L'area di un triangolo è poi **a*b/2** e, poiché ogni poligono è equiesteso a un triangolo, si può così ottenere l'area di un qualunque poligono.

Si eviterebbe in questo modo la complicata introduzione dell'area di molti testi scolastici.

Giarre 09/06/2015

Alfio Grasso
grassoalfino@yahoo.it